京大数学理科後期 1995 年度

1　問題 1

自然数 n に対して，x^n を x^2+ax+b で割った余りを r_nx+s_n とする．次の 2 条件 (イ)，(ロ) を考える．

(イ) $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta),\ \alpha>\beta>0$ と表せる．
(ロ) 全ての自然数 n に対して $r_n<r_{n+1}$ が成り立つ．

1. (イ)，(ロ) が満たされる時，全ての自然数 n に対して $\beta-1<\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n(\alpha-1)$ が成り立つことを示せ．
2. 実数 a，b がどのような範囲にあるとき (イ)，(ロ) が満たされるか．必要十分条件を求め，点 (a,b) の存在する範囲を図示せよ．

2　問題 2

O を中心とする円周上に相異なる 3 点 A_0，B_0，C_0 が時計回りの順に置かれている．自然数 n に対し，点 A_n，B_n，C_n を次の規則で定めていく．

(イ) A_n は弧 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$ を二等分する点である．（ここで弧 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$ は他の点 C_{n-1} を含まない方を考える．以下においても同様である．）
(ロ) B_n は弧 $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$ を二等分する点である．
(ハ) C_n は弧 $\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}$ を二等分する点である．

$\angle\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n$ の大きさを α_n とする．ただし，$\angle\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n$ は点 C_n を含まない方の弧 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中心角を表す．

1. 全ての自然数 n に対して $4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi$ であることを示せ.
2. 全ての自然数 n に対して $\alpha_{n+2} = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{8}\alpha_{n-1}$ であることを示せ.
3. α_{3n} を α_0 であらわせ.

3 問題 3

a, b, c は実数で $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$
$$q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく. $-1 \leq x \leq 1$ を満たす全ての x に対して $|p(x)| \leq 1$ が成り立つ時, $-1 \leq x \leq 1$ を満たす全ての x に対して $|q(x)| \leq 2$ が成り立つことを示せ.

4 問題 4

1. 平面ベクトル $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ から 2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ を作る. $\vec{\boldsymbol{x}}$, $\vec{\boldsymbol{y}}$ のどの一方も他方の実数倍ではない時, P は逆行列を持つことを示せ.
2. $B = \begin{pmatrix} p & b \\ c & -p \end{pmatrix}$ は単位行列の実数倍ではないとする. この時設問 (1) のようにして作った P が逆行列 P^{-1} を持ち,
$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2 + bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
が成り立つようなベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}$, $\vec{\boldsymbol{y}}$ があることを示せ.
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列の実数倍ではなく, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ も単位行列の実数倍ではないとする. A, A' が
$$a + d = a' + d', \, ad - bc = a'd' - b'c'$$
を満たせば, $P^{-1}BP = A'$ となる P があることを示せ.

5　問題 5

A と B の 2 人が次のようなゲームを行う．n を自然数とし，A はそれぞれ $0, 1, 2, \cdots, n$ と書かれた $(n+1)$ 枚の札を持っている．B はそれぞれ $1, 2, \cdots, n$ と書かれた n 枚の札を持っているとする．第 1 回目に B が A の持札から 1 枚の札をとり，もし番号が一致する札があればその 2 枚の札をその場に捨てる．番号が一致しない札はそのまま持ち続ける．次に B に持ち札があれば A が B の持ち札から 1 枚の札をとり，B と同じことをする．こうして先に札のなくなった方を勝とする．A が勝つ確率を p_n，B が勝つ確率を q_n とする．ただし相手の札を撮る時，どの札も等しい確率で撮るものとする．

1. p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ．
2. $p_n + q_n = 1$，$(n+2)p_n - np_{n-2} = 1$，$(n = 3, 4, 5, \cdots)$ であることを示せ．
3. p_n を求めよ．

6　問題 6

曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}\,(x > 0)$，3 点 $\mathrm{A} = (a, 0)$，$\mathrm{R} = (4, 0)$，$\mathrm{Q} = (0, 2)$ を考える．ただし $0 < a < 4$ とする．点 A から C に接線 L_a をひき，その y 軸との交点を B，原点を O とする．

1. 直線 RQ が接線 L_a と第 1 象限の点 $\mathrm{M} = (x_0, y_0)$，$x_0 > 0$，$y_0 > 0$ で交わるための必要十分条件を求めよ．

設問 (1) の条件が満たされている時，四角形 OAMQ の面積を T，$\triangle$ARM の面積を S_1，$\triangle$BQM の面積を S_2 とする．

2 $r = S_1 + S_2$，$m = S_1S_2$ とおく時，点 (r, m) の存在する範囲を図示せよ．