京大数学理科後期 1994 年度

1　問題 1

$a+b+c=0$ を満たす実数 a，b，c について，$(|a|+|b|+|c|)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2)$ が成り立つことをしめせ．また，ここで統合が成り立つのはどんな場合か．

2　問題 2

a，b，c，d を整数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし，自然数 n に対して $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする．このとき，

1. $n \geq 0$ について，$c_{n+2}-(a+d)c_{n+1}+(ad-bc)c_n=0$ を示せ．
2. p を素数とし，$a+d$ は p で割り切れないものとする．ある自然数 k について，c_k と c_{k+1} が p で割り切れるならば，すべての n について c_n は p で割り切れることを示せ．

3　問題 3

xy 平面上で，$(1,1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．P,Q はそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分にある点で，線分 PQ が円 C に接しているとする．正三角形 PQR を第一象限内に描くとき，頂点 R の座標 (a,b) について，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．

4　問題 4

3 人の選手 A，B，C が次の方式で優勝を争う．

まず A と B が対戦する．そのあとは，一つの対戦が終わると，その勝者と休んでいた選手が勝負をする．このようにして対戦を繰り返し，先に 2 勝した選手を優勝者とする．(2 連勝でなくてもよい．)

各回の勝負で引き分けはなく，A と B は互角の力量であるが，C が A,B に勝つ確率はともに p である．

1. 2 回の対戦で優勝者が決まる確率を求めよ．
2. ちょうど 4 回目の対戦で優勝者が決まる確率を求めよ．
3. A，B，C の優勝する確率が等しくなるような p の値を求めよ．

5　問題 5

実数 r は $2\pi r > 1$ を満たすとする．半径 r の円の周上に 2 点 P，Q を，孤 PQ の長さが 1 になるようにとる．点 R が孤 PQ 上を P から Q まで動くとき，弦 PR が動いて通過する部分の面積を $S(r)$ とする．

r が変化するとき，面積 $S(r)$ の最大値を求めよ．

6　問題 6

n を自然数とし，$I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n \, \mathrm{d}x$ とおく．

1. I_{n+1} を I_n を用いてあらわせ．
2. すべての n に対して，$\dfrac{e-1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$ が成り立つことを示せ．