京大数学理科後期 1993 年度

1　問題 1

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が次の 3 条件を満たしているとする．

1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} = \frac{f(x)}{x^3 - x} = 1$
2. 曲線 $y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の傾きは負である．
3. 2 点 $(0, f(0))$ と $(1, f(1))$ を通る直線を l とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 l で囲まれる図形のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分の面積は $\dfrac{3}{4}$ である．

このとき，a，b，c の値を求めよ．

2　問題 2

実数 a に対して，$f(x) = x^3 - 3ax$ とおく．

1. t を実数とする．方程式 $f(x) = t$ が相異なる 3 個の実数解を保つために a と t が満たすべき条件をもとめよ．
2. $g(x) = f(f(x))$ とおく．方程式 $g(x) = 0$ が相異なる 9 個の実数解を持つような a の範囲を求めよ．

3　問題 3

原点 O を中心とする 1 つの円周上に相異なる 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，$\mathrm{C_0}$，$\mathrm{D_0}$ をとる．$\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，$\mathrm{C_0}$，$\mathrm{D_0}$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ と書く．

1. $\triangle \mathrm{B_0C_0D_0}$，$\triangle \mathrm{C_0D_0A_0}$，$\triangle \mathrm{D_0A_0B_0}$，$\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$ の重心をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$，

D_1 とする．このとき，この 4 点は同一円周上にあることを示し，その円の中心 P_1 の一ベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ であらわせ．

2. 4 点 A_1，B_1，C_1，D_1 に対し上と同様に A_2，B_2，C_2，D_2 を定め，A_2，B_2，C_2，D_2 を通る円の中心を P_2 とする．以下，同様に P_3，P_4，$\cdots$ を定める．$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ であらわせ．
3. $\lim_{n\to\infty} |P_nQ| = 0$ を満たす点 Q の一ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ であらわせ．ただし，$|P_nQ|$ は線分 P_nQ の長さである．

4　問題 4

a は正の定数とする．不等式 $a^x \geq ax$ が全ての正の数 x に対して成り立つという．このとき a はどのようなものか．

5　問題 5

$n \geq 3$ とする．$1, 2 \cdots, n$ のうちから重複を許して 6 個の数字をえらびそれを並べた順列を考える．このような順列のうちで，どの数字もそれ以外の 5 つの数字のどれかに等しくなっているようなものの個数を求めよ．

6　問題 6

a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2 を実数とする．不等式 $\dfrac{a_1x + b_1}{x + c_1} > \dfrac{a_2x + b_2}{x + c_2}$ が $x \neq -c_1$ かつ $x \neq -c_2$ となるすべての実数 x に対して成立するための必要十分条件を求めよ．