京大数学理科後期 1992 年度

1　問題 1

0 でない x の整式 $f(x)$ に対し，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$G(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ とおく．ある定数 p，q が存在して，$F(G(x))=-\{F(x)\}^2+pG(x)+q$ が成立しているとする．

1. $a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ とおくとき，$F(x)$ を a を用いてあらわせ．
2. さらに $0\leq x\leq 1$ での $F(x)$ の最大値が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，$f(x)$ を求めよ．

2　問題 2

一辺の長さが n の立方体 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{PQRS}$ がある．ただし，2 つの正方形 ABCD, PQRS は立方体の向かい合った面で AP，BQ，CR，DS は，それぞれ，立方体の辺である．

立方体の各面は一辺の長さ 1 の正方形に碁盤目状に区切られているとする．そこで，頂点 A から頂点 R へ碁盤目上の辺を辿っていくときの最短経路を考える．

1. 辺 BC 上の点を通過する最短経路は全部で何通りあるか．
2. 頂点 A から頂点 R への最短経路は全部で何通りあるか．

3　問題 3

放物線 $y=x^2$ の上の点 $\mathrm{P}(t,t^2)$（ただし，$t>0$）でこの曲線に接し，かつ y 軸にも接する円を C_1，C_2 とし，それぞれの半径を r，$R(r<R)$ とする．

1. t が正の実数全体を動くとき，$\dfrac{R}{r}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

2. $\dfrac{R}{r} = 2$ となる点 $\mathrm{P}(t, t^2)$ をもとめよ．

4　問題 4

平面ベクトル $\vec{\boldsymbol{p}}$，$\vec{\boldsymbol{q}}$ の内積を $\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{q}}$ と表す．f は平面上の一次変換とする．

1. $\vec{\boldsymbol{p}}$，$\vec{\boldsymbol{q}}$ がたがいに直交する単にベクトルとすると，$T = f(\vec{\boldsymbol{p}}) \cdot \vec{\boldsymbol{p}} + f(\vec{\boldsymbol{q}}) \cdot \vec{\boldsymbol{q}}$ は，ベクトルの組 $\vec{\boldsymbol{p}}$，$\vec{\boldsymbol{q}}$ の取り方によらないで，f によって決まる値であることを示せ．
2. 原点 O を通る 2 つの定直線 l と m があって，f によって l 上の任意の点 R は R 自身に移され，m 上の任意の点 S は OS の中点 S$'$ に移されるとする．このとき f に対する T の値を求めよ．

5　問題 5

1 から $N+2(N \geq 2)$ までの番号のついた玉 $(N+2)$ 個を用意し，手元に 1 と 2 の番号のついた玉をおき，残り N 個の玉を箱に入れる．さらに，

> 「玉を一つ箱からとりだし，手元の玉 2 個と取り出した玉 1 個計 3 個の玉のうち最も小さい番号の玉を箱に返す．」

という操作を n 回繰り返す（$n \geq 1$）．最後に手元に残った 2 個の玉の番号のうち小さい方を X とし，大きい方を Y とする．

1. $Y \leq m$ である確率 $P(Y \leq m)$ をもとめよ（$m = 3, 4, \cdots, N+2$）．
2. $X \leq m$ である確率 $P(X \leq m)$ をもとめよ（$m = 2, 3, \cdots, N+1$）．

6　問題 6

$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし，空間内の原点 O と 4 つの点

$$\mathrm{A}(1,1,1), \mathrm{B}(-1/a, a, 0), \mathrm{C}(-a, 0, 1/a), \mathrm{D}(0, -1/a, a),$$

について，次の問に答えよ．

1. 四点 A，B，C，D は正方形の頂点であることを示せ．

2. 四角錐 O − ABCD を平面 $x = 0$ によって二つの部分 W_1，W_2 に分けたとき，W_1，W_2 の体積の比を求めよ.