京大数学理科後期 1991 年度

1　問題 1

$-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $y = f(x)$ は次の 1,2 を満たしている．

1 $\sin f(x) = 1 - x^2$
2 $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$

1. x を y の関数として表し，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．
2. $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　問題 2

一辺の長さ 2cm の正四面体を，一つの面を下にして水平面上に置く．この正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体 H を中空の容器と考える．

1. 容器 H の高さ h_0(cm) を求めよ．
2. 水を毎秒 1cm^3 の割合で H に注入するとき，水面の高さが $h\text{cm}(0 \leq h \leq h_0)$ になるまでに要する時間 t（秒）を求めよ．

3　問題 3

空間に原点を始点とする長さ 1 のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある．$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を γ，$\vec{b}$, $\vec{c}$ のなす角を α，$\vec{c}$, $\vec{a}$ のなす角を β とするとき，次の関係の成立することを示せ．またここで等号の成立するのはどのような場合か．

$$0 \leq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq 1$$

4　問題 4

平面上で次の方程式 1 を満たす点全体の集合を C_1，2 を満たす点全体の集合を C_2 とする．

1 $x^2 + y^2 - 1 = 0$
2 $10x^2 + 14xy + 5y^2 = 1$

1. a，b，c，d は負でない整数で $ad - bc > 0$ を満たしている．さらに $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の定める一時変換 f が C_2 を C_1 に写している．すなわち $f(C_2) = C_1$ である．このとき a，b，c，d を求めよ．
2. C_2 上の点で x 座標，y 座標とも整数であるものは何個あるか．

5　問題 5

1 から n までの相異なる n 個の自然数 $(n \geq 4)$ の中から無作為に 2 個を取り出し，大きい方を X_1，小さい方を Y_1 とする．つぎに残りの $(n-2)$ 個の自然数の中から無作為に 2 個を取り出し，大きい方を X_2，小さい方を Y_2 とする．

1. $X_1 + Y_1$ の期待値を求めよ
2. X_1 の期待値を求めよ．
3. Y_2 の期待値を求めよ．

6　問題 6

1. 任意の定数 a に対して $e^x \geq e^a + (x-a)e^a$ が成り立つことを示せ．
2. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sin \pi x} \mathrm{d}x \geq e^{2/\pi}$ を示せ．