

京大数学理科後期 1990 年度

1 問題 1

曲線 $y = x^4 - 6x^2$ に、点 (a, b) を通る 4 つの接線が引けるのは、 (a, b) がどのような範囲にあるときか、図示せよ。

2 問題 2

$f(x) = \frac{a - \cos x}{x^2}$ が $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で増加関数となるような定数 a のうち最大のものを求めよ。

3 問題 3

関数 $y = \log x$ のグラフ上の 1 点 $P(x \log s)(s \geq 1)$ における接線と y 軸の交点を Q とする。グラフの上に $A(1, 0)$ をとる。AP 間のグラフの長さを \hat{AP} 、線分 PQ の長さを \overline{PQ} とし、 $t = \overline{PQ} - \hat{AP}$ とする。 t は s の関数である。

1. $\frac{dt}{ds}$ を s であらわせ。
2. $u = \frac{1}{s}$, $v = \sqrt{1+u^2}$ とおくとき、 $\frac{du}{dt}$ および $\frac{dv}{dt}$ を u の関数としてあらわせ。
3. u を t の関数としてあらわせ。

4 問題 4

座標空間に 3 点 P, Q, R があって毎秒 1 秒の速さで、それぞれ

- 点 P は原点 $(0, 0, 0)$ を出発して x 軸上を正の方向へ、

- 点 Q は点 $(2, 0, 0)$ を出発して y 軸と平行に正の方向へ,
- 点 R は点 $(2, 2, 0)$ を出発して z 軸と平行に正の方向へ,

進む. このとき三角形 PQR の面積 S が最小となるのは何秒後か.

5 問題 5

平面上に 2 つの円 C, C' がある. 一次変換 f は逆変換をもち, かつ C を C' にうつしている.

1. l を C 上の 1 点 P における接線とする. このとき l の f による像 l' は点 $f(P)$ における C' の接線である. この理由を述べよ.
2. A を C の中心とすれば, $f(A)$ は C' の中心となる. この理由を述べよ.

6 問題 6

n 本のくじの中に 1 本だけ当たりくじがある. このくじを無作為に 1 本ひき, 引いたくじをもとに戻すという試行を l 回繰り返す. l 回のうち当たった回数を X とする. 確率変数 $X_i (1 \leq i \leq l)$ を次により定める.

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 回目に当たりくじがでたとき,} \\ 0 & i \text{ 回目に当たりくじがでないとき.} \end{cases}$$

1. 確率変数 X を $X_i (1 \leq i \leq l)$ であらわせ.
2. X^2 の期待値 $E(X^2)$ を求めよ.
3. $E(X^2) > 2$ となる最小の l は何か.