1　問題 1

二つの奇数 a，b にたいして，$m = 11a + b$，$n = 3a + b$ とおく．つぎの (1)，(2) を証明せよ．

1. m，n の最大公約数は，a，b の最大公約数を d として，$2d$，$4d$，$8d$ のいずれかである．
2. m，n がともに平衡数であることはない．（整数の 2 乗である数を平方数という．）

2　問題 2

放物線 $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面があり，y 軸が水平面に垂直で y 軸の正の部分が上方にあるように置いてある．その局面の中に半径 r $\left(r > \dfrac{1}{2}\right)$ の球を落とし込む．このとき，この回転面と九面とで囲まれた部分の体積を求めよ．

3　問題 3

座標平面において，つぎの条件を満たす $\triangle\mathrm{ABC}$ と半平面 $\mathrm{H} = \{(x, y) | x \geq 0\}$ との共通部分の面積の最大値を求めよ．

$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ であるような二等辺三角形であって，AC は y 軸に平行で，A の座標は $(-1, 0)$ である．また，AB と y 軸との交点を D とすると，$\mathrm{DB} = 2\sqrt{3}$ である．

4　問題 4

a, b はともに 0 でない実数で, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. O を原点とする座標平面において, 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を動く．また，点 $\mathrm{Q}(x', y')$ を $A = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって定める．このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ．

5　問題 5

n は自然数で，$n \geq 3$ である．数 $1, 2, \cdots n$ のいずれについても，それが記入されたカードが 1 枚ずつ，計 n 枚のカードがある．

A 君は，それらのカードのうち 2 枚を無作為に取り出し，それらに記入されている数のうち大きい方を A 君の得点とする．

B 君は，それらのカードから 1 枚を無作為に取り出し，書かれている数を確認してから，そのカードを返すことを 2 回繰り返して，書かれている数の大きい（または小さくない）方を B 君の得点とする．

A，B 両君のうち特典の大きい方を勝ちとする．

A 君の勝つ確率 p と B 君の勝つ確率 q との大小を比較せよ．

6　問題 6

$F(x) = \dfrac{ax}{x+1}$ とおく．ただし，a は定数で $0 < a \leq 1$ である．関数の列 $\{f_n(x)\}$ を次によって定める．

(i) $f_1(x) = F(x)$

(ii) $f_{n+1}(x) = F(f_n(x))(n = 1, 2, 3, \cdots)$

1. $f_n(x)$ を a，x，n の式で表せ．
2. 次の条件をみたす数列 $\{b_n\}$ を一つ作れ．（a の値によって，異なる数列であってもよい．）

   条件 $c > 0$ ならば，数列 $\{b_n \cdot f_n(c)\}$ は正の数に収束する．